変数分離形の微分方程式 (ロジスティック方程式)

担当: 金丸隆志

[問題 1] 変数分離形

以下の微分方程式を解け

$$\frac{dx}{dt} = x(x+1) \qquad (\text{ただし} -1 < x < 0)$$

[問題 1 解説]

$-1 < x < 0$ なので、$x \neq 0, -1$ と考えて良い。$x(x+1)$ で両辺を割ると、以下のように**変数分離形**になる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)}\frac{dx}{dt} &= 1 \\ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\frac{dx}{dt} &= 1 \end{aligned}$$

上の変形では、部分分数への分解に注意。t で積分して

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx &= \int 1\, dt \\ \log|x| - \log|x+1| &= t + C \\ \log\left|\frac{x}{x+1}\right| &= t + C \\ \left|\frac{x}{x+1}\right| &= e^{t+C} \\ -\frac{x}{x+1} &= e^C e^t \end{aligned}$$

絶対値 $|x/(x+1)|$ を外す際、$-1 < x < 0$ より $|x/(x+1)| = -x/(x+1)$ としたことに注意。$e^C = A \ \ (A > 0)$ と置いて、上の式を x について解くと

$$x = \underline{-\frac{Ae^t}{1+Ae^t} \quad (A > 0)}$$

あるいは、分子分母を Ae^t で割った以下の形でも構わない。

$$\underline{x = -\frac{1}{Be^{-t}+1} \quad (B > 0)}$$

[問題 2] ロジスティック方程式

時刻 t における生物の個体数を $N(t)$ とする。$N(t)$ の時間変化は、繁殖による増加の効果 (N に比例) と、食物や居住可能面積に制限があることなどによる上限 K の存在とを取り込み、以下のようなロジスティック方程式であらわされる。ただし、r と K は正の定数である。

$$\frac{dN}{dt} = rN(K-N) \qquad (\text{ただし } 0 < N < K)$$

この微分方程式を解き、グラフの概形を描け。r, K をそのままに描くので、電卓で値を計算して描くことはできない。

[問題 2 解説]

$0 < N < K$ なので、$N \neq 0, K$ と考えて良い。$N(K-N)$ で両辺を割ると、以下のように**変数分離形**になる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(K-N)}\frac{dN}{dt} &= r \\ \frac{1}{K}\left(\frac{1}{N-K} - \frac{1}{N}\right)\frac{dN}{dt} &= r \end{aligned}$$

上の変形では、部分分数への分解に注意。t で積分して

$$\begin{aligned}
\frac{1}{K}\int\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N-K}\right)\,dN &= \int r\,dt \\
\frac{1}{K}\left(\log|N|-\log|N-K|\right) &= rt+C \\
\log\left|\frac{N}{N-K}\right| &= rKt+C' \\
\left|\frac{N}{N-K}\right| &= e^{rKt+C'} \\
-\frac{N}{N-K} &= e^{C'}e^{rKt}
\end{aligned}$$

ここで、絶対値 $|N/(N-K)|$ を外す際、$0<N<K$ より $|N/(N-K)|=-N/(N-K)$ としたことに注意。$e^{C'}=A\ \ (A>0)$ と置いて解くと

$$\underline{N \;=\; \frac{KAe^{rKt}}{1+Ae^{rKt}}\quad (A>0)}$$

分子分母を Ae^{rKt} で割った以下の形でも構わない。

$$\underline{N=\frac{K}{Be^{-rKt}+1}\quad (B>0)}$$

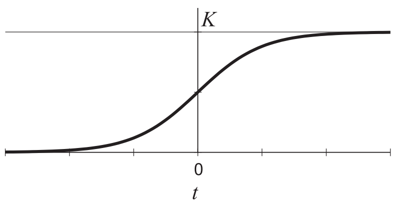

図 1: 解のグラフ。任意定数は $A=1$ とした