資料 ローパスフィルター

担当: 金丸隆志

1 [応用] RC 回路の微分方程式

1.1 RC 回路の定義

図 1 のように R [Ω] の抵抗、 C [F] のコンデンサ、E [V] の電池を使って RC 回路を作成する。回路には図のようにスイッチ (SW) が付いており、スイッチが (A) の状態には電池の電圧が回路に加わり、(B) の状態では電池が無効になり回路は短絡される。この回路がどのように動作するかを考えるのが今回の演習である。まず、回路に流れる電流を I [A]、コンデンサの両端電圧を $V(t)$ [V]、コンデンサに蓄えられる電荷量を q [C] とする。まず、以下の基本関係がわかる。

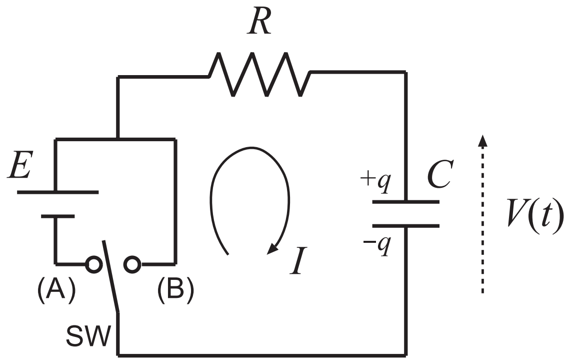

図 1: RC 回路。コンデンサの両端電圧を $V(t)$ とする。R, C, E は定数。

1. コンデンサの基本式 $q = CV$
2. 抵抗の両端電圧 $V_R = RI$
3. 電流と電荷の関係 $I = dq/dt$

この 3 つの式を全て使えば、抵抗の両端電圧 V_R は

$$V_R = RI = R\frac{dq}{dt} = RC\frac{dV}{dt}$$

となる。以上をもとに、キルヒホッフの法則により回路の方程式をたてる。

まず、スイッチが (A) の状態にある場合、電池の起電力が、抵抗とコンデンサによる電位降下の和に等しいので

$$E = RC\frac{dV}{dt} + V \tag{1}$$

が成り立つ。これを「コンデンサの電圧 $V(t)$ に関する微分方程式」として見やすい形に書き直すと

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC}V + \frac{E}{RC} \tag{2}$$

となる。これは「資料 定数係数 1 階線形微分方程式」の (3) 式の形をしている。

一方、スイッチが (B) の状態にある場合は、$E = 0$ とすれば良いから

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC}V \tag{3}$$

が成り立つ。これは「資料 定数係数 1 階線形微分方程式」の (1) 式の形をしている。

1.2 RC 回路の微分方程式の解法

(a) 時刻 $t=0$ において $V(0)=E$ [V] であったとする。時刻 $t=0$ においてスイッチを (B) につないだとき、$t>0$ においては微分方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC}V$$

が成り立つ。この微分方程式を解いて $V(t)$ を求めると、「資料 定数係数 1 階線形微分方程式」の (2) 式より

$$V = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

ここで $t=0$ で $V=E$ となるように A を定めると、$A=E$。よって

$$V = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

$R=1$ [Ω]、 $C=1$ [F]、$E=1$ [V] と仮定してこのグラフを描くと図 2 のようになる。これはコンデンサの放電を表す。

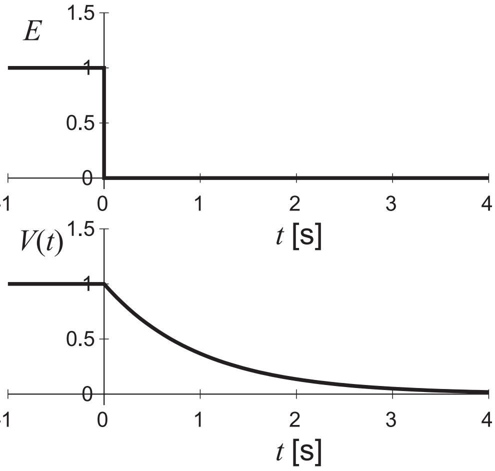

図 2: コンデンサの放電。

(b) 次に、時刻 $t=0$ において $V(0)=0$ [V] であったとする。時刻 $t=0$ においてスイッチを (A) につないだとき、$t>0$ においては微分方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC}V + \frac{E}{RC} \tag{4}$$

が成り立つ。「資料 定数係数 1 階線形微分方程式」の (4) 式より解は

$$V(t) = E + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

$t=0$ において $V(0)=0$ を満たすためには $A=-E$。よって解は

$$V(t) = E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

となる。$R=1$ [Ω]、 $C=1$ [F]、$E=1$ [V] と仮定してこのグラフを描くと図 3 のようになる。これはコンデンサの充電を表す。

(c) $R=1$ [Ω]、 $C=1$ [F]、$E=1$ [V] と仮定し、さらに時刻 $t=0$ において $V(0)=0$ [V] であったとする。その後、スイッチを (A) → (B) と図 4 のように切替える。時刻 $t>0$ における $V(t)$ のグラフを描くと (a) 、(b) の類推から図 4 のようになる。これはコンデンサの充電と放電を表す。

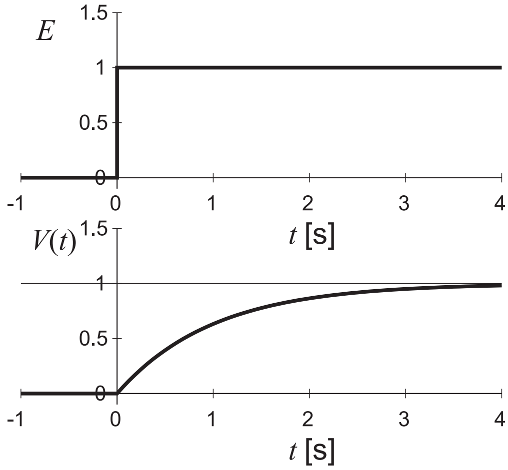

図 3: コンデンサの充電。

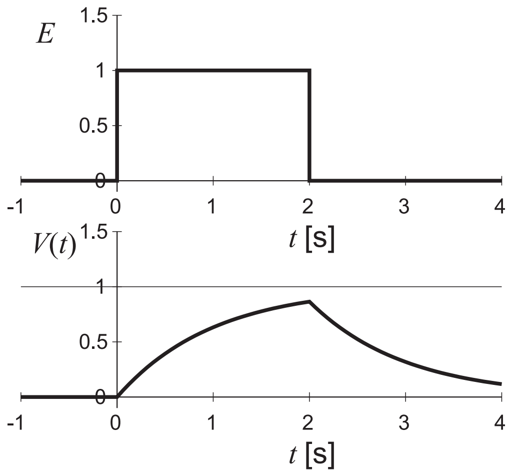

図 4: コンデンサの充電と放電

1.3 RC 回路の解釈

この回路の満たす微分方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC}V(t) + \frac{E(t)}{RC} \tag{5}$$

において、$E(t)$ を回路への入力、$V(t)$ を回路の出力とみなそう。$E(t)$ と $V(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $\tilde{E}(s)$ と $\tilde{V}(s)$ と書くとき、(5) 式のラプラス変換は次式で書ける。

$$s\tilde{V}(s) = -\frac{1}{RC}\tilde{V}(s) + \frac{\tilde{E}(s)}{RC} \tag{6}$$

整理すると

$$\tilde{V}(s) = \frac{1}{RCs+1}\tilde{E}(s) \tag{7}$$

と書ける。すなわち、(5) 式で表されるシステムは**一次遅れ系**であり、その伝達関数は

$$\frac{1}{RCs+1} \tag{8}$$

である。図 2、図 3、図 4 は一次遅れ系のローパスフィルターとしての挙動を示していたことになる。