微分方程式論 (11) 定数係数の 2 階非斉次線形微分方程式 (2) (未定係数法) (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿

[問題 1]
以下の微分方程式を解け。
(a) $x'' + 9x = \cos t$
(b) $x'' + 4x = \sin 3t$

[問題 1 解説]
(a) 特性方程式

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

から 2 つの 2 虚数解 $\lambda = \pm 3i$ が得られるので、この斉次微分方程式の一般解は
$x_{\text{斉次}}(t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$ である。

次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。$x_{\text{特殊}}(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ の形の特殊解を仮定し、問題の非斉次微分方程式が満たされるよう A と B を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned} x'_{\text{特殊}}(t) &= -A\sin(t) + B\cos(t) \\ x''_{\text{特殊}}(t) &= -A\cos(t) - B\sin(t) \end{aligned}$$

となるので、問題の非斉次微分方程式に代入する。

$$\begin{aligned} -A\cos(t) - B\sin(t) + 9(A\cos(t) + B\sin(t)) &= \cos(t) \\ 8(A\cos(t) + B\sin(t)) &= \cos(t) \end{aligned}$$

ここで両辺を見比べると $A = \frac{1}{8}$, $B = 0$ である。よって特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = \frac{1}{8}\cos(t)$。

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{\frac{1}{8}\cos(t) + C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)}$$

である。

(b) 特性方程式

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

から 2 つの 2 虚数解 $\lambda = \pm 2i$ が得られるので、この斉次微分方程式の一般解は
$x_{\text{斉次}}(t) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$ である。

次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。$x_{\text{特殊}}(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$ の形の特殊解を仮定し、問題の非斉次微分方程式が満たされるよう A と B を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned} x'_{\text{特殊}}(t) &= -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t) \\ x''_{\text{特殊}}(t) &= -9A\cos(3t) - 9B\sin(3t) \end{aligned}$$

となるので、問題の非斉次微分方程式に代入する。

$$\begin{aligned} -9A\cos(3t) - 9B\sin(3t) + 4(A\cos(3t) + B\sin(3t)) &= \sin(3t) \\ -5(A\cos(3t) + B\sin(3t)) &= \sin(3t) \end{aligned}$$

ここで両辺を見比べると $A = 0$, $B = -\frac{1}{5}$ である。よって特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = -\frac{1}{5}\sin(3t)$。

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{-\frac{1}{5}\sin(3t) + C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)}$$

である。

[問題 2]
以下の微分方程式を解け。
(a) $x'' + 9x = \cos 3t$
(b) $x'' + 4x = \sin 2t$

[問題 2 解説]
(a) 斉次微分方程式の解は **[問題 1]**(a) と同じく $x_{\text{斉次}}(t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$ となる。

次に、$x_{\text{特殊}}(t) = t\,(A\cos(3t) + B\sin(3t))$ の形の特殊解を仮定し、問題の非斉次微分方程式が満たされるよう A と B を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned} x'_{\text{特殊}}(t) &= A\cos(3t) + B\sin(3t) \\ &\quad + t\,(-3A\sin(3t) + 3B\cos(3t)) \\ &= (A + 3Bt)\cos(3t) + (B - 3At)\sin(3t) \\ x''_{\text{特殊}}(t) &= 3B\cos(3t) - 3(A + 3Bt)\sin(3t) \\ &\quad -3A\sin(3t) + 3(B - 3At)\cos(3t) \\ &= (6B - 9At)\cos(3t) - (6A + 9Bt)\sin(3t) \end{aligned}$$

となるので、問題の非斉次微分方程式に代入する。

$$\begin{aligned} (6B - 9At)\cos(3t) - (6A + 9Bt)\sin(3t) \\ +9\,t\,(A\cos(3t) + B\sin(3t)) = \cos(3t) \\ 6B\cos(3t) - 6A\sin(3t) = \cos(3t) \end{aligned}$$

ここで両辺を見比べると $A = 0$, $B = \frac{1}{6}$ である。よって特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = \frac{1}{6}\,t\,\sin(3t)$。

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{\frac{1}{6}\,t\,\sin(3t) + C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)}$$

である。

(b) 斉次微分方程式の解は [**問題 1**](b) と同じく
$x_{\text{斉次}}(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$ となる。
　次に、
$x_{\text{特殊}}(t) = t\,(A\cos(2t) + B\sin(2t))$ の形の特殊解を仮定し、問題の非斉次微分方程式が満たされるよう A と B を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned}
x'_{\text{特殊}}(t) &= A\cos(2t) + B\sin(2t) \\
&\quad + t\,(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) \\
&= (A + 2Bt)\cos(2t) + (B - 2At)\sin(2t) \\
x''_{\text{特殊}}(t) &= 2B\cos(2t) - 2(A + 2Bt)\sin(2t) \\
&\quad - 2A\sin(2t) + 2(B - 2At)\cos(2t) \\
&= (4B - 4At)\cos(2t) - (4A + 4Bt)\sin(2t)
\end{aligned}$$

となるので、問題の非斉次微分方程式に代入する。

$$\begin{aligned}
&(4B - 4At)\cos(2t) - (4A + 4Bt)\sin(2t) \\
&\qquad + 4\,t\,(A\cos(2t) + B\sin(2t)) = \sin(2t) \\
&\qquad 4B\cos(2t) - 4A\sin(2t) = \sin(2t)
\end{aligned}$$

ここで両辺を見比べると $A = -\frac{1}{4}, B = 0$ である。よって特殊解は $x_{\text{特殊}}(t) = -\frac{1}{4}\,t\,\cos(2t)$。
　以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{-\frac{1}{4}\,t\,\cos(2t) + C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)}$$

である。