微分方程式論 (11) 定数係数の 2 階非斉次線形微分方程式 (2) (未定係数法) (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

[補足 0] 一般的な解法 (前回の再掲)

今回は以下の形式の微分方程式を解く。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p\frac{dx}{dt}+qx=f(t) \tag{0}$$

右辺を $f(t)=0$ とすれば、これは前回まで学んできた**2 階斉次線形微分方程式**に他ならない。$f(t)\neq 0$ の場合を**2 階非斉次線形微分方程式**と呼ぶ。この解法として**未定係数法**と**定数変化法**が知られているが、本講義では計算量の少ない**未定係数法**を紹介する。

[**未定係数法 Step 1**]

$f(t)=0$ とし、斉次微分方程式をあらかじめ解いておく。一般的に書けば $x_{斉次}(t)=C_1g_1(t)+C_2g_2(t)$ となるのだった (特性方程式の解によって、$g_1(t)$, $g_2(t)$ は指数関数や三角関数になる)。

[**未定係数法 Step 2**]

$f(t)\neq 0$ の**非斉次**微分方程式 (0) 式を満たす解を一つ見つける。これを**特殊解**といい、$x_{特殊}(t)$ と書く。どのように見つけるのかは問題による (後述) が、このステップが今回のポイントとなる。

[**未定係数法 Step 3**]

$x_{斉次}(t)$ と $x_{特殊}(t)$ とを足し合わせた
$\underline{x(t)=x_{特殊}(t)+x_{斉次}(t)}$ が求める一般解である。

これだけではわかりにくいので、以下で具体的な例を用いて解説する。

なお、前回は [**補足 1**]、[**補足 2**] を取り扱ったので、今回はその続きとして [**補足 3**]、[**補足 4**] とする。

[補足 3] 例題 3

以下の微分方程式を解け。ただし、実数定数 ω, β は $\omega>0, \beta\neq\omega$ を満たすとする (なお、右辺が sin であっても解法の流れは替わらない)。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\cos(\beta t) \tag{1}$$

[Step 1]

まず、(1) 式右辺=0 とした斉次微分方程式の一般解を求める。$x=e^{\lambda t}$ (λ は定数) の形の解を仮定して得られる特性方程式

$$\lambda^2+\omega^2=0$$

を解くと 2 つの 2 虚数解 $\lambda=\pm i\omega$ が得られるので、この斉次微分方程式の一般解は $x_{斉次}(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ である。ここにかなりの省略があるが、何が省略されて cos, sin が現われたのかを理解しておくこと。

[Step 2]

次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。ここで、非斉次微分方程式の右辺に着目し、βt を含む三角関数、すなわち $x_{特殊}(t)=A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)$ の形の特殊解を仮定し、非斉次微分方程式 (1) 式が満たされるよう A と B を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned}x'_{特殊}(t) &= -A\beta\sin(\beta t)+B\beta\cos(\beta t)\\ x''_{特殊}(t) &= -A\beta^2\cos(\beta t)-B\beta^2\sin(\beta t)\end{aligned}$$

となるので、非斉次微分方程式 (1) 式に代入する。

$$\begin{gathered}-A\beta^2\cos(\beta t)-B\beta^2\sin(\beta t)\\ +\omega^2(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t))=\cos(\beta t)\\ (\omega^2-\beta^2)(A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t))=\cos(\beta t)\end{gathered}$$

ここで両辺を見比べると $A=\frac{1}{\omega^2-\beta^2}$, $B=0$ である。よって特殊解は $x_{特殊}(t)=\frac{1}{\omega^2-\beta^2}\cos(\beta t)$。

[Step 3]

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t)=\underline{\frac{1}{\omega^2-\beta^2}\cos(\beta t)+C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)}$$

である。

[補足 4] 例題 4

以下の微分方程式を解け。ただし、実数定数 ω は $\omega>0$ を満たすとする (なお、右辺が sin であっても解法の流れは替わらない)。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=\cos(\omega t) \tag{2}$$

[Step 1]

まず、(2) 式右辺=0 とした斉次微分方程式の一般解を求める。これは [**補足 3**] と同じなので $x_{斉次}(t)=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ となる。

[Step 2]

次に、非斉次微分方程式の特殊解を一つ求める。[**補足 3**] と同様に $x_{特殊}(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$ の形の特殊解を仮定したくなるかもしれないが、これは ([**補足 2**] と同様) 間違いである。つまり、$x_{特殊}(t)$ と $x_{斉次}(t)$

が等しくなってしまうし、なによりこの形では (2) 式が満たされない。

このような場合は $x_{特殊}(t) = t\,(A\cos(\omega t){+}B\sin(\omega t))$ の形の特殊解を仮定すれば良い。非斉次微分方程式 (2) 式が満たされるよう A と B を定める。1 回微分と 2 回微分を計算すると

$$\begin{aligned}
x'_{特殊}(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\
&\quad +t\,(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)) \\
&= (A + B\omega t)\cos(\omega t) + (B - A\omega t)\sin(\omega t) \\
x''_{特殊}(t) &= B\omega\cos(\omega t) - (A + B\omega t)\omega\sin(\omega t) \\
&\quad -A\omega\sin(\omega t) + (B - A\omega t)\omega\cos(\omega t) \\
&= (2B\omega - A\omega^2 t)\cos(\omega t) - (2A\omega + B\omega^2 t)\sin(\omega t)
\end{aligned}$$

となるので、非斉次微分方程式 (2) 式に代入する。

$$\begin{aligned}
&(2B\omega - A\omega^2 t)\cos(\omega t) - (2A\omega + B\omega^2 t)\sin(\omega t) \\
&\quad +\omega^2\,t\,(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) = \cos(\omega t) \\
&\quad 2B\omega\cos(\omega t) - 2A\omega\sin(\omega t) = \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

ここで両辺を見比べると $A = 0,\ B = \frac{1}{2\omega}$ である。よって特殊解は $x_{特殊}(t) = \frac{1}{2\omega}\,t\,\sin(\omega t)$。

[Step 3]

以上から、問題の非斉次微分方程式の一般解は

$$x(t) = \underline{\frac{1}{2\omega}\,t\,\sin(\omega t) + C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)}$$

である。