微分方程式論 (9) 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式 (3) (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1]
以下の微分方程式を解け。
(a) $x'' - 6x' + 9x = 0$
(b) $x'' + 4x' + 4x = 0$

[問題 1 解説]
(a) 特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ を解くと、$\lambda = 3$ (重解)。よって、$\underline{x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}}$ (C_1, C_2 は任意定数)。

(b) 特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ を解くと、$\lambda = -2$ (重解)。よって、$\underline{x = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}}$ (C_1, C_2 は任意定数)。

[問題 2]
ばね定数 k のばねにつながれた質量 m のおもりを考える。今回は速度に比例した摩擦項 $-\delta x'$ があるとすると、運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \delta\frac{dx}{dt}$$

と書けるが、全て左辺に移項した形

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

で取り扱うことが多い。

ここで、今回は $\delta = 2\sqrt{mk}$ を満たす場合を考えよう。すなわち

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sqrt{mk}\,\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

である。この運動方程式の解で、時刻 $t = 0$ において $x = x_0$, $dx/dt = 0$ を満たすものを求めよ。

[問題 2 解説]
特性方程式は

$$m\lambda^2 + 2\sqrt{mk}\lambda + k = 0$$

である。これを解くと、$\lambda = -\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ が重解となる。よって、一般解は

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

となる。さらに、$t = 0$ で $x = x_0$ を満たすためには、

$$x_0 = (C_1 + C_2 0)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}0} = C_1$$

よって、$C_1 = x_0$。また、$t = 0$ で $dx/dt = 0$ も満たさなければならない。dx/dt を計算しておくと

$$\frac{dx}{dt} = C_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + (C_1 + C_2 t)\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}\right)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 0 &= C_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}0} + (C_1 + C_2 0)\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}\right)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}0} \\ &= C_2 - \sqrt{\frac{k}{m}}C_1 \end{aligned}$$

よって $C_2 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}C_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}x_0$。以上から、解は $\underline{x = x_0\left(1 + \sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}}$