微分方程式論 (7) 定数係数の 2 階斉次線形微分方程式 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

[補足 1] 例題

以下の定数係数の 2 階斉次線形微分方程式を解け。ただし、α と β は互いに異なる実数定数であるとする。

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\alpha+\beta)\frac{dx}{dt} + \alpha\beta x = 0 \qquad (1)$$

[解法 Step 1]

$x = e^{\lambda t}$ (λ は定数) の形の解を仮定しよう。$x = e^{\lambda t}$ を t で微分すると、$x' = \lambda e^{\lambda t}$ および $x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ が得られるので、これを問題の微分方程式 (1) に代入すると、

$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda t} - (\alpha+\beta)\lambda e^{\lambda t} + \alpha\beta e^{\lambda t} &= 0\\ (\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta)e^{\lambda t} &= 0\end{aligned}$$

ここで、$e^{\lambda t} > 0$ は 0 には成り得ないので、$\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$ となるが、これは λ に関する 2 次方程式である。これを解くと

$$\begin{aligned}\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta &= 0\\ (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta) &= 0\\ \lambda &= \alpha, \beta\end{aligned}$$

よって、$x = e^{\alpha t}$ と $x = e^{\beta t}$ はともに問題の微分方程式 (1) の解であることがわかった。なお、上の 2 次方程式 $\lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = 0$ のことを**特性方程式**という。

[解法 Step 2]

次に、2 つの任意定数 C_1 と C_2 を用いた線形和 $x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$ も問題の微分方程式 (1) の解であることを示そう。いま、x の一階微分と二階微分をあらかじめ計算しておくと、

$$\begin{aligned}x' &= \alpha C_1 e^{\alpha t} + \beta C_2 e^{\beta t},\\ x'' &= \alpha^2 C_1 e^{\alpha t} + \beta^2 C_2 e^{\beta t},\end{aligned}$$

となるから、これを問題の微分方程式 (1) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \alpha^2 C_1 e^{\alpha t} + \beta^2 C_2 e^{\beta t}\\ &\quad -(\alpha+\beta)(\alpha C_1 e^{\alpha t} + \beta C_2 e^{\beta t})\\ &\quad \alpha\beta(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t})\\ &= (\alpha^2 - (\alpha+\beta)\alpha + \alpha\beta)C_1 e^{\alpha t}\\ &\quad +(\beta^2 - (\alpha+\beta)\beta + \alpha\beta)C_2 e^{\beta t}\\ &= 0 = (\text{右辺})\end{aligned}$$

よって問題の微分方程式 (1) が満たされることがわかった。

[解法 Step 3]

よって、問題の微分方程式の**一般解**は $\underline{x = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}}$ である。

[解法に関するコメント]

ここではフォーマルな形で書いたが、一般的にこのような問題が出たときの解答は [**解法 Step 1**] → [**解法 Step 3**] と進めば良い。[**解法 Step 2**] は一度は計算してみて欲しいが、何度かやればからくりがわかるはず。

なお、一般に、2 階の微分方程式の一般解には、2 つの任意定数 (ここでは C_1, C_2) が存在することに注意して欲しい。前回までに扱った変数分離形は 1 階の微分方程式なので任意定数は一つであったことにも注意 ($x = Ae^{-t}$ の A のように)。