微分方程式論 演習問題 (6) 1 階線形微分方程式 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

問題

以下の微分方程式を解け。

1. $tx' + x = 4t(1+t^2)$

2. $x' + (1+2t)x = te^{-t^2}$

[**解答**]

1. 両辺を t で割ると

$$x' + \frac{1}{t}x = 4(1+t^2) \qquad \text{(i)}$$

これは**非斉次方程式**であるので、まず**斉次方程式**

$$x' + \frac{1}{t}x = 0 \qquad \text{(ii)}$$

を**変数分離形**の解法で解くことから始める。$x \neq 0$ を仮定し、整理すると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t}$$

となる。両辺を t で積分すると

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\,dx &= -\int \frac{1}{t}\,dt \\
\log|x| &= -\log|t| + C \\
\log|tx| &= C \\
|tx| &= e^C \\
tx &= \pm e^C \\
tx &= A \quad (A \neq 0) \\
x &= \frac{A}{t} \quad (A \neq 0) \qquad \text{(iii)}
\end{aligned}$$

ここで、$x=0$ を仮定すると、これも斉次方程式 (ii) 式を満たす。これは (iii) 式において $A=0$ と置いた場合に相当するから、斉次方程式の解は $x = \frac{A}{t}$ (A は任意)。さて、問題の非斉次方程式 (i) 式の解は、斉次方程式の解の定数 A を t の関数 $A(t)$ とみなす**定数変化法**で解くことができる。

$x = \frac{A(t)}{t}$ の形の解を仮定し、これを問題の微分方程式に代入する方針をとる。まず、x の微分は

$$x' = \frac{\frac{dA(t)}{dt}t - A(t)}{t^2}$$

と書ける。ここで $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ を用いたことに注意。これと $x = \frac{A(t)}{t}$ を問題の微分方程式 (i) 式の左辺に代入すると、

$$x' + \frac{1}{t}x = \frac{\frac{dA(t)}{dt}t - A(t)}{t^2} + \frac{1}{t}\frac{A(t)}{t} = \frac{1}{t}\frac{dA(t)}{dt}$$

これを (i) 式の右辺と結んで、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\frac{dA(t)}{dt} &= 4(1+t^2) \\
\frac{dA(t)}{dt} &= 4(t+t^3)
\end{aligned}$$

これを $A(t)$ に関する微分方程式とみなし、両辺を t で積分すると、

$$A(t) = 2t^2 + t^4 + C \quad (C \text{ は任意})$$

これを $x = \frac{A(t)}{t}$ に代入すると、

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2t^2 + t^4 + C}{t} \quad (C \text{ は任意}) \\
&= \underline{2t + t^3 + \frac{C}{t} \quad (C \text{ は任意})}
\end{aligned}$$

2. これは**非斉次方程式**であるので、まず**斉次方程式**

$$x' + (1+2t)x = 0 \qquad \text{(iv)}$$

を**変数分離形**の解法で解くことから始める。$x \neq 0$ を仮定し、整理すると

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -1 - 2t$$

となる。両辺を t で積分すると

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\,dx &= \int (-1-2t)\,dt \\
\log|x| &= -t - t^2 + C \\
|x| &= e^{-t-t^2+C} \\
x &= \pm e^C e^{-t-t^2} \\
x &= Ae^{-t-t^2} \quad (A \neq 0) \qquad \text{(v)}
\end{aligned}$$

ここで、$x=0$ を仮定すると、これも斉次方程式 (iv) 式を満たす。これは (v) 式において $A=0$ と置いた場合に相当するから、斉次方程式の解は $x = Ae^{-t-t^2}$ (A は任意)。さて、問題の非斉次方程式の解は、斉次方程式の解の定数 A を t の関数 $A(t)$ とみなす**定数変化法**で解くことができる。

$x = A(t)e^{-t-t^2}$ の形の解を仮定し、これを問題の微分方程式に代入する方針をとる。まず、 x の微分は

$$x' = \frac{dA(t)}{dt}e^{-t-t^2} + A(t)(-1-2t)e^{-t-t^2}$$

と書ける。ここで $(fg)' = f'g + fg'$ および $f(g(t))' = f'(g(t))g'(t)$ を用いたことに注意。これと $x = A(t)e^{-t-t^2}$ を問題の微分方程式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} x' + (1+2t)x &= \frac{dA(t)}{dt}e^{-t-t^2} + A(t)(-1-2t)e^{-t-t^2} \\ &\quad +(1+2t)A(t)e^{-t-t^2} \\ &= \frac{dA(t)}{dt}e^{-t-t^2} \end{aligned}$$

これを問題の微分方程式の右辺と結んで、

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt}e^{-t-t^2} &= te^{-t^2} \\ \frac{dA(t)}{dt} &= te^{t} \end{aligned}$$

これを $A(t)$ に関する微分方程式とみなし、両辺を t で積分すると、

$$\begin{aligned} A(t) &= \int te^t\,dt \\ &= te^t - \int e^t\,dt \\ &= te^t - e^t + C \quad (C \text{ は任意}) \end{aligned}$$

となる。部分積分の公式を用いたことに注意。これを $x = A(t)e^{-t-t^2}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} x &= (te^t - e^t + C)e^{-t-t^2} \quad (C \text{ は任意}) \\ &= \underline{te^{-t^2} - e^{-t^2} + Ce^{-t-t^2} \quad (C \text{ は任意})} \end{aligned}$$