微分方程式論 演習問題 (5) 同次形 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿＿＿

問題

以下の微分方程式を解け。

1. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t-x}{t+x}$

2. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x^2}{t^2+tx}$

[解答]

1. 右辺の分子分母を t で割ると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-\dfrac{x}{t}}{1+\dfrac{x}{t}}$$

これは**同次形**であるので $u = x/t$ の変数変換を行なうと、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-u}{1+u} \qquad \text{(i)}$$

一方、$u = x/t$ より $x = ut$ が導かれるが、この両辺を t で微分すると、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u \qquad \text{(ii)}$$

(i), (ii) 式より

$$\frac{du}{dt}t + u = \frac{1-u}{1+u}$$

これを du/dt について整理すると

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u^2+2u-1}{u+1}\frac{1}{t} \qquad \text{(iii)}$$

これは**変数分離形**なので、$u^2+2u-1 \neq 0$ を仮定して u を左辺、t を右辺にまとめると

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t}$$

この両辺を t で積分すると、

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}\,du = -\int \frac{1}{t}\,dt$$

ここで、$f(u) = u^2+2u-1$ に対して $f'(u) = 2u+2$ であることに注意して両辺に 2 をかけると

$$\int \frac{2(u+1)}{u^2+2u-1}\,du = -2\int \frac{1}{t}\,dt$$

公式 $\displaystyle\int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt = \log|f(t)| + C$ が左辺に使えることに注意して、

$$\begin{aligned}
\log|u^2+2u-1| &= -2\log|t| + C \\
\log|u^2+2u-1| + 2\log|t| &= C \\
\log|u^2+2u-1| + \log|t|^2 &= C \\
\log|(u^2+2u-1)t^2| &= C \\
|(u^2+2u-1)t^2| &= e^C \\
(u^2+2u-1)t^2 &= \pm e^C \\
(u^2+2u-1)t^2 &= A \quad (A \neq 0) \qquad \text{(iv)}
\end{aligned}$$

ここで、(iii) 式において $u^2+2u-1=0$ を仮定しよう。このとき $u = -1 \pm \sqrt{2}$ (定数関数) となり、(iii) 式は

$$\frac{du}{dt} = 0$$

となる。$u = -1 \pm \sqrt{2}$ (定数関数) はこれを満たすから、$u = -1 \pm \sqrt{2}$ (あるいは $u^2+2u-1=0$) も問題の微分方程式の解と言える。これは (iv) 式において $A = 0$ とおいた場合に相当するから、解は

$$(u^2+2u-1)t^2 = A \quad (A \text{ は任意})$$

と書ける ($A \neq 0$ の条件が無くなったことに注意)。

これに $u = x/t$ を代入して整理すると

$$\underline{x^2+2tx-t^2 = A \quad (A \text{ は任意})}$$

2. 右辺の分子分母を t^2 で割ると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(\dfrac{x}{t}\right)^2}{1+\dfrac{x}{t}}$$

これは**同次形**であるので $u = x/t$ の変数変換を行なうと、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u^2}{1+u} \qquad \text{(v)}$$

一方、$u = x/t$ より $x = ut$ が導かれるが、この両辺を t で微分すると、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u \qquad \text{(vi)}$$

(v), (vi) 式より

$$\frac{du}{dt}t + u = \frac{u^2}{1+u}$$

これを du/dt について整理すると

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{1+u}\frac{1}{t}$$

これは**変数分離形**なので、$u \neq 0$ を仮定して u を左辺、t を右辺にまとめると、

$$\frac{1+u}{u}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t}$$

両辺を t で積分すると、

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+u}{u}\,du &= -\int \frac{1}{t}\,dt \\
\int \left(\frac{1}{u}+1\right)\,du &= -\int \frac{1}{t}\,dt \\
\log|u| + u &= -\log|t| + C \\
\log|u| + \log|t| &= -u + C \\
\log|ut| &= -u + C \\
|ut| &= e^{-u+C} \\
ut &= \pm e^{C} e^{-u} \\
ut &= Ae^{-u} \quad (A \neq 0)
\end{aligned}$$

ここで $u = x/t$ を代入して x に戻すと、

$$x = Ae^{-\frac{x}{t}} \quad (A \neq 0) \tag{vii}$$

ここまでは $u \neq 0$、すなわち $x \neq 0$ を仮定して解を求めたが、$x = 0$ は問題の微分方程式を満たすのでこれも解である。$x = 0$ は (vii) 式において、$A = 0$ とおいた場合に相当するから、まとめると解は

$$\underline{x = Ae^{-\frac{x}{t}} \quad (A \text{ は任意})}$$