微分方程式論 演習問題 (5) 同次形 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

[**補足 1**]

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$$

という形の微分方程式を同次形とよび、下記のように解く。

$u = x/t$ の変数変換を行なうと、問題の微分方程式は

$$\frac{dx}{dt} = f(u) \tag{1}$$

となる。一方、$u = x/t$ より $x = ut$ が導かれるが、この両辺を t で微分すると、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u \tag{2}$$

が得られる。(1), (2) 式より

$$\frac{du}{dt}t + u = f(u) \tag{3}$$

となる。これを du/dt について整理すると、

$$\frac{du}{dt} = \frac{f(u) - u}{t} \tag{4}$$

となる。これは、これまでに学んできた変数分離形であり、

$$\int \frac{1}{f(u) - u}\, du = \int \frac{1}{t}\, dt \tag{5}$$

として解くことができる。

[**補足 2**]

下記の例題を解け

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 - x^2}{2tx}$$

右辺の分子分母を t^2 で割ると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}{2\frac{x}{t}}$$

となり、これは**同次形**である。$u = x/t$ の変数変換を行なうと、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 - u^2}{2u} \tag{6}$$

一方、$u = x/t$ より $x = ut$ が導かれるが、この両辺を t で微分すると、

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u \tag{7}$$

(6), (7) 式より

$$\frac{du}{dt}t + u = \frac{1 - u^2}{2u}$$

これを du/dt について整理すると

$$\frac{du}{dt} = -\frac{3u^2 - 1}{2u}\frac{1}{t} \tag{8}$$

両辺を $(3u^2 - 1)/2u$ で割ると

$$\frac{2u}{3u^2 - 1}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t} \tag{9}$$

となり、これは変数分離形。積分すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\int \frac{6u}{3u^2 - 1}\, du &= -\int \frac{1}{t}\, dt && (10)\\
\log|3u^2 - 1| &= -3\log|t| + C && (11)\\
\log|3u^2 - 1| + 3\log|t| &= C && (12)\\
\log|(3u^2 - 1)t^3| &= C && (13)\\
(3u^2 - 1)t^3 &= \pm e^C && (14)\\
(3u^2 - 1)t^3 &= A \quad (A = \pm e^C = A) && (15)
\end{aligned}$$

ここに $u = x/t$ を代入して

$$\begin{aligned}
(3(x/t)^2 - 1)t^3 &= A && (16)\\
(3x^2 - t^2)t &= A \quad (A \neq 0) && (17)
\end{aligned}$$

$A = 0$ の場合も解になるので、答えは

$$\underline{(3x^2 - t^2)t = A \quad (A \text{ は任意})} \tag{18}$$