

微分方程式論 演習問題 (4) 変数分離形 (続き 2) (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: _____ 氏名: _____

[問題 1] 変数分離形

以下の微分方程式を解け

$$\frac{dx}{dt} = x(x+1) \quad (\text{ただし } -1 < x < 0)$$

[問題 1 解説]

$-1 < x < 0$ なので、 $x \neq 0, -1$ と考えて良い。 $x(x+1)$ で両辺を割ると、以下のように変数分離形になる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} \frac{dx}{dt} &= 1 \\ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \frac{dx}{dt} &= 1 \end{aligned}$$

上の变形では、部分分数への分解に注意。 t で積分して

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx &= \int 1 dt \\ \log|x| - \log|x+1| &= t + C \\ \log \left| \frac{x}{x+1} \right| &= t + C \\ \left| \frac{x}{x+1} \right| &= e^{t+C} \\ -\frac{x}{x+1} &= e^C e^t \end{aligned}$$

ここで、絶対値 $|x/(x+1)|$ を外す際、 $-1 < x < 0$ より $|x/(x+1)| = -x/(x+1)$ としたことに注意。 $e^C = A$ ($A > 0$) と置いて、上の式を x について解くと

$$x = \frac{-Ae^t}{1 + Ae^t} \quad (A > 0)$$

あるいは、分子分母を Ae^t で割った以下の形でも構わない。

$$x = \frac{1}{Be^{-t} + 1} \quad (B > 0)$$

[問題 2] ロジスティック方程式

時刻 t における生物の個体数を $N(t)$ とする。 $N(t)$ の時間変化は、繁殖による増加の効果 (N に比例) と、食物や居住可能面積に制限があることなどによる上限 K の存在とを取り込み、以下のようなロジスティック方程式であらわされる。ただし、 r と K は正の定数である。

$$\frac{dN}{dt} = rN(K - N) \quad (\text{ただし } 0 < N < K)$$

この微分方程式を解き、グラフの概形を描け。 r, K をそのままに描くので、電卓で値を計算して描くことは

できない。

[問題 2 解説]

$0 < N < K$ なので、 $N \neq 0, K$ と考えて良い。 $N(K - N)$ で両辺を割ると、以下のように変数分離形になる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(K - N)} \frac{dN}{dt} &= r \\ \frac{1}{K} \left(\frac{1}{N - K} - \frac{1}{N} \right) \frac{dN}{dt} &= r \end{aligned}$$

上の变形では、部分分数への分解に注意。 t で積分して

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \int \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N - K} \right) dN &= \int r dt \\ \frac{1}{K} (\log|N| - \log|N - K|) &= rt + C \\ \log \left| \frac{N}{N - K} \right| &= rKt + C' \\ \left| \frac{N}{N - K} \right| &= e^{rKt + C'} \\ -\frac{N}{N - K} &= e^{C'} e^{rKt} \end{aligned}$$

ここで、絶対値 $|N/(N - K)|$ を外す際、 $0 < N < K$ より $|N/(N - K)| = -N/(N - K)$ としたことに注意。 $e^{C'} = A$ ($A > 0$) と置いて解くと

$$N = \frac{KAe^{rKt}}{1 + Ae^{rKt}} \quad (A > 0)$$

分子分母を Ae^{rKt} で割った以下の形でも構わない。

$$N = \frac{K}{Be^{-rKt} + 1} \quad (B > 0)$$

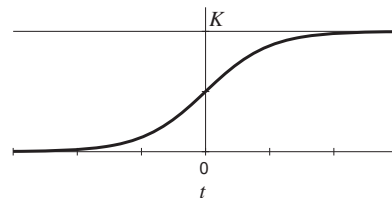


図 1: 解のグラフ。任意定数は $A = 1$ とした