微分方程式論 演習問題 (3) 変数分離形 (続き 1) (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号:＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

[問題 1] RC 回路の微分方程式

図 1 のように R [Ω] の抵抗、 C [F] のコンデンサ、E [V] の電池を使って RC 回路を作成する。コンデンサの両端電圧を $V(t)$ [V] とするとき、以下の問いに答えよ

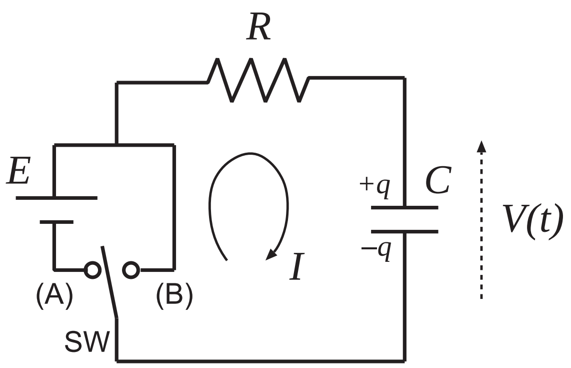

図 1: RC 回路。コンデンサの両端電圧を $V(t)$ とする。R, C, E は定数。

(a) 時刻 $t = 0$ において $V(0) = E$ [V] であったとする。時刻 $t = 0$ においてスイッチを (B) につないだとき、$t > 0$ においては微分方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC}V \tag{1}$$

が成り立つ。この微分方程式を解いて $V(t)$ を求めよ。

(b) $R = 1$ [Ω]、 $C = 1$ [F]、$E = 1$ [V] と仮定して (a) のグラフを描け。回答欄は次ページにある。

(c) 時刻 $t = 0$ において $V(0) = 0$ [V] であったとする。時刻 $t = 0$ においてスイッチを (A) につないだとき、$t > 0$ においては微分方程式

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC}(V - E) \tag{2}$$

が成り立つ。この微分方程式を解いて $V(t)$ を求めよ。

(d) $R = 1$ [Ω]、 $C = 1$ [F]、$E = 1$ [V] と仮定して (c) のグラフを描け。回答欄は次ページにある。

(e) $R = 1$ [Ω]、 $C = 1$ [F]、$E = 1$ [V] と仮定し、さらに時刻 $t = 0$ において $V(0) = 0$ [V] であったとする。その後、スイッチを (A) → (B) と裏の図 2(e) のように切替える。時刻 $t > 0$ における $V(t)$ のグラフを (b)、(d) の結果から類推して描け。回答欄は次ページにある。

[問題 1 解説]

(a) 微分方程式 (1) を変数分離形で解けば良い。まず $V \neq 0$ と仮定して、両辺を V で割る。

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC} \tag{3}$$

t で積分して

$$\int \frac{1}{V}\,\frac{dV}{dt}\,dt = -\int \frac{1}{RC}\,dt \tag{4}$$

ここで、以下の性質を用いると

$$\frac{dV}{dt}\,dt = dV \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{V}\,dV &= -\int \frac{1}{RC}\,dt \\
\log|V| &= -\frac{1}{RC}t + K \quad (K \text{ は任意の積分定数}) \\
|V| &= e^{-\frac{t}{RC}+K} \\
V &= \pm e^{-\frac{t}{RC}+K} \\
V &= \pm e^{K} e^{-\frac{t}{RC}} \\
V &= A e^{-\frac{t}{RC}} \quad (A \neq 0) \quad (※)
\end{aligned}$$

一方、$V = 0$ なる定数関数を考えると、これも問題の微分方程式 (1) を満たす。そして、これは (※) において $A = 0$ の場合に相当する。よって $A \neq 0$ と $A = 0$ をまとめて

$$V = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (A \text{ は任意})$$

ここで、$V(0) = E$ という初期条件を代入すると、

$$E = A$$

よって $A = E$ が得られるので、求める答えは

$$\underline{V = Ee^{-\frac{t}{RC}}}$$

(b) 図 2 参照。

(c) 微分方程式 (2) を変数分離形で解けば良い。まず $V \neq E$ と仮定して、両辺を $(V-E)$ で割る。

$$\frac{1}{V-E}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC} \tag{6}$$

t で積分して

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{V-E}\,dV &= -\int \frac{1}{RC}\,dt \\
\log|V-E| &= -\frac{1}{RC}t + K \quad (K\ \text{は任意の積分定数}) \\
|V-E| &= e^{-\frac{t}{RC}+K} \\
V-E &= \pm e^{-\frac{t}{RC}+K} \\
V &= E \pm e^{K} e^{-\frac{t}{RC}} \\
V &= E + Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (A \neq 0) \quad (※)
\end{aligned}$$

一方、$V = E$ なる定数関数を考えると、これも問題の微分方程式 (1) を満たす。そして、これは (※) において $A = 0$ の場合に相当する。よって $A \neq 0$ と $A = 0$ をまとめて

$$V = E + Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (A\ \text{は任意})$$

ここで、$V(0) = 0$ という初期条件を代入すると、

$$0 = E + A$$

よって $A = -E$ が得られるので、求める答えは

$$\underline{V = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})}$$

(d) 図 2 参照

(e) 図 2 参照。コンデンサの充電と放電は、入力の電圧 (E) にゆっくり追随する (**ローパスフィルタ**) ことが重要である。なお、充放電の速さは抵抗 R [Ω] とコンデンサ C [F] の積である RC [s] によって決まる。RC は時間の次元を持つ**時定数**と呼ばれる量であり、RC の値が大きい程ゆっくり充放電される。なお、今回は計算を簡単にするため $R = 1$ [Ω]、$C = 1$ [F] としたので $RC = 1$ [s] という非常にゆっくりとした時定数となったが、実際の回路ではこんなにゆっくりと変化するわけではない。現実的な C は [μF] $= 10^{-6}$ [F] のオーダーだからである。

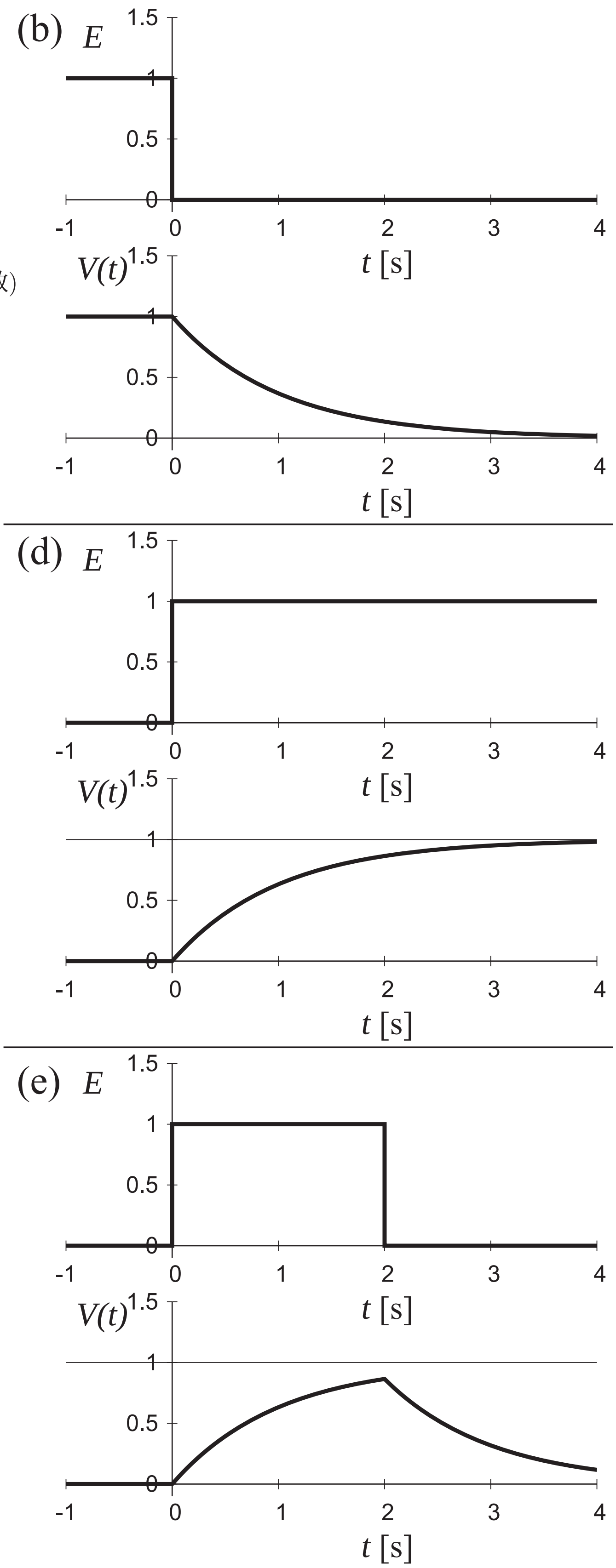

図 2: (b), (d), (e) の解答。