微分方程式論 演習問題 (3) 変数分離形 (続き 1) (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

[補足 1] RC **回路の微分方程式**

図 1 のように R [Ω] の抵抗、 C [F] のコンデンサ、E [V] の電池を使って RC 回路を作成する。回路には図のようにスイッチ (SW) が付いており、スイッチが (A) の状態には電池の電圧が回路に加わり、(B) の状態では電池が無効になり回路は短絡される。この回路がど

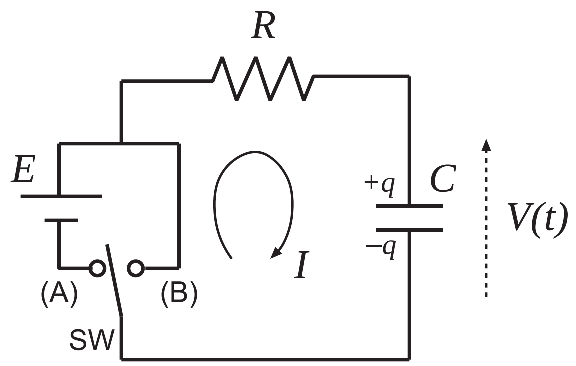

図 1: RC 回路。コンデンサの両端電圧を $V(t)$ とする。R, C, E は定数。

のように動作するかを考えるのが今回の演習である。まず、回路に流れる電流を I [A]、コンデンサの両端電圧を $V(t)$ [V]、コンデンサに蓄えられる電荷量を q [C] とする。まず、以下の基本関係がわかる。

1. コンデンサの基本式 $q = CV$
2. 抵抗の両端電圧 $V_R = RI$
3. 電流と電荷の関係 $I = dq/dt$

この 3 つの式を全て使えば、抵抗の両端電圧 V_R は

$$V_R = RI = R\frac{dq}{dt} = RC\frac{dV}{dt} \tag{1}$$

となる。以上をもとに、キルヒホッフの法則により回路の方程式をたてる。

まず、スイッチが (A) の状態にある場合、電池の起電力が、抵抗とコンデンサによる電位降下の和に等しいので

$$E = RC\frac{dV}{dt} + V \tag{2}$$

が成り立つ。これを「コンデンサの電圧 $V(t)$ に関する微分方程式」として見やすい形に書き直すと

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC}(V - E) \tag{3}$$

となる。これは t の関数 $V(t)$ に関する微分方程式である (R, C, E は定数)。

一方、スイッチが (B) の状態にある場合は、$E = 0$ とすれば良いから

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC}V \tag{4}$$

が成り立つ。