微分方程式論 演習問題 (2) 変数分離形 (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ＿＿＿＿＿＿ 氏名: ＿＿＿＿＿＿

[問題 1] 前回の復習 (直接積分形)

(a) は問に答え、(b)、(c) は微分方程式を解け。

- (a)　時刻 $t=1$ に位置 $x(1)=5$ にいた自動車が、時刻 t における速度 $dx/dt=-t^2+10t$ を満たしながら走行する。時刻 t における自動車の位置 $x(t)$ を求めよ。
- (b)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t+1}$
- (c)　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{t^2+1}$

[問題 1 解説]

(a) まず、速度を積分することで、以下が得られる。

$$x(t)=-\frac{1}{3}t^3+5t^2+C \quad (C \text{ は任意定数})$$

ここで、$x(1)=5$ を用いると、

$$\begin{aligned} x(1) &= -\frac{1}{3}+5+C=5 \\ \text{よって } C &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

以上より、時刻 t における自動車の位置 $x(t)$ は

$$\underline{x(t)=-\frac{1}{3}t^3+5t^2+\frac{1}{3}}$$

(b) 前回学んだ**直接積分形**なので、

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{1}{t+1}\,dt \\ &= \underline{\log|t+1|+C} \\ &\quad \left(\int f(t+a)\,dt=F(t+a) \text{ を思い出そう}\right) \end{aligned}$$

(c) これも前回学んだ**直接積分形**なので、

$$x=\int\frac{2t}{t^2+1}\,dt$$

ここで、$f(t)=t^2+1$ とすると $f'(t)=2t$ であることに注意すると、$\displaystyle\int\frac{f'(t)}{f(t)}\,dt=\log|f(t)|+C$ が使える。あるいは、$f(t)=\dfrac{1}{t}$, $g(t)=t^2+1$ に対して公式 $\displaystyle\int f(g(t))g'(t)\,dt=F(g(t))+C$ を使っても良い。いずれにせよ、

$$\underline{x=\log|t^2+1|+C \quad (C \text{ は任意})}$$

なお、 $t^2+1>0$ は明らかなので絶対値記号を取って

$$\underline{x=\log(t^2+1)+C \quad (C \text{ は任意})}$$

でも同じである。(こちらの方が望ましい)

[問題 2] 変数分離形

以下の微分方程式を解け。

- (a)　$\dfrac{dx}{dt}=-2x$
- (b)　$\dfrac{dx}{dt}=-t(x+1)$

[問題 2 解説]

(a) まず $x\neq 0$ と仮定して、両辺を x で割る。

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=-2 \tag{1}$$

t で積分して

$$\int\frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt}\,dt=\int(-2)\,dt \tag{2}$$

ここで、以下の性質を用いると

$$\frac{dx}{dt}\,dt=dx \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \int\frac{1}{x}\,dx &= \int(-2)\,dt \\ \log|x| &= -2t+C \quad (C \text{ は任意の積分定数}) \\ |x| &= e^{-2t+C} \\ x &= \pm e^{-2t+C} \\ x &= \pm e^C e^{-2t} \\ x &= Ae^{-2t} \;\; (A\neq 0) \quad (※) \end{aligned}$$

一方、$x=0$ なる定数関数を考えると、これも問題の微分方程式を満たす。そして、これは (※) において $A=0$ の場合に相当する。よって $A\neq 0$ と $A=0$ をまとめて

$$\underline{x=Ae^{-2t} \quad (A \text{ は任意})}$$

(b) まず $x\neq -1$ と仮定して、両辺を $x+1$ で割る。

$$\frac{1}{x+1}\frac{dx}{dt}=-t \tag{4}$$

t で積分して

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x+1}\,dx &= -\int t\,dt \\ \log|x+1| &= -\frac{1}{2}t^2 + C \\ |x+1| &= e^{-\frac{1}{2}t^2+C} \\ x+1 &= \pm e^{-\frac{1}{2}t^2+C} \\ x+1 &= \pm e^{C} e^{-\frac{1}{2}t^2} \\ x &= Ae^{-\frac{1}{2}t^2} - 1 \ \ (A \neq 0) \quad (※) \end{aligned}$$

一方、$x = -1$ なる定数関数を考えると、これも問題の微分方程式を満たす。そして、これは (※) において $A = 0$ の場合に相当する。よって $A \neq 0$ と $A = 0$ をまとめて

$$\underline{x = Ae^{-\frac{1}{2}t^2} - 1 \quad (A\text{ は任意})}$$