微分方程式論 演習問題 (2) 変数分離形 (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ____________ 氏名: ____________

[補足 1] 変数分離形の微分方程式

(様々なバリエーションはあり得るが、) 以下の形の微分方程式を変数分離形と言い、

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) \tag{1}$$

下記のように、左辺に x の関数、右辺に t の関数をまとめることで解くことができる。

$$\frac{1}{f(x)}\,\frac{dx}{dt} = g(t) \tag{2}$$

ここで両辺を t で積分すると、下記のようになる。その先の計算は、各問題で解説する。

$$\int \frac{1}{f(x)}\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int g(t)dt \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{f(x)}\,dx = \int g(t)dt \tag{4}$$

[補足 2] 例題と解法

最も簡単な変数分離形の微分方程式を解こう。

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad (a \text{ は } 0 \text{ でない定数}) \tag{5}$$

この問題は電気回路に流れる電流など、あらゆる場面で登場する基本的なものである。

ここで、変数分離のために両辺を x で割りたいのだが、そのために x が 0 かどうかで場合分けする必要がある。まず $x \neq 0$ と仮定して、両辺を x で割る。

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a \tag{6}$$

t で積分して

$$\int \frac{1}{x}\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int a\,dt \tag{7}$$

ここで、以下の性質を用いると

$$\frac{dx}{dt}\,dt = dx \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\,dx &= \int a\,dt \\
\log|x| &= at + C \qquad (C \text{ は任意の積分定数}) \\
|x| &= e^{at+C} \\
x &= \pm e^{at+C} \\
x &= \pm e^{C} e^{at} \\
x &= Ae^{at} \;\; (A \neq 0) \quad (※)
\end{aligned}$$

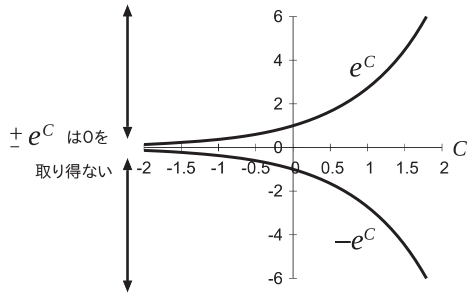

図 1: $\pm e^C$ (C は任意定数) は 0 を取り得ない

ここで、$\pm e^C = A$ (ただし $A \neq 0$) という任意定数 A を定義した。A が 0 を取り得ないのは、$\pm e^C$ という指数関数の性質からわかる (図 1)。

一方、$x = 0$ なる定数関数を考えると、これも問題の微分方程式 (5) を満たす (両辺ともに 0 となるから)。そして、これは (※) において $A = 0$ の場合に相当する。よって $A \neq 0$ と $A = 0$ をまとめて

$$\underline{x = Ae^{at} \quad (A \text{ は任意})}$$

この $x = Ae^{at}$ の形の関数は物理や工学では $a < 0$ の場合で頻繁に登場する。図 2 は $x(t) = e^{-t}$ のグラフである。例えばコンデンサに蓄えられた電荷が放電して減衰して行く様子などにこの波形が見られる。一方、

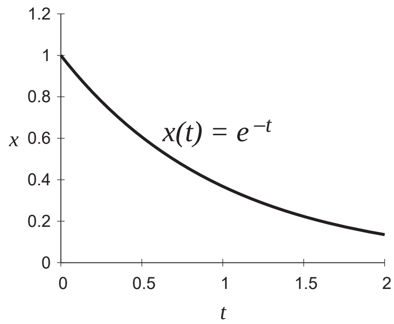

図 2: $x(t) = e^{-t}$ は $t \to \infty$ で 0 に収束する

$a > 0$ の場合は $x(t) = e^{at}$ は $t \to \infty$ で無限に発散する関数であるので、工学で望ましくない解を表す。例えば、ばねが振れすぎて壊れてしまうとか、大電流が流れてしまう、などといった状態である。