微分方程式論 (1) 微分方程式とは何か (解答編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: ______________ 氏名: ______________

[問題 1] 微分方程式の解の検算

かっこ内の関数が、与えられたの微分方程式の解になっていることを確認 (検算) せよ。

1. $\dfrac{dx}{dt} = -ax$
   ($x(t) = Ae^{-at}$, A: 任意定数)
2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$
   ($x(t) = A\sin(\omega t+\theta)$, A, θ: 任意定数)

[問題 1 解説]

1.
$$\begin{aligned} x' &= -aAe^{-at} \\ &= -ax \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x' &= A\omega\cos(\omega t+\theta) \\ x'' &= -A\omega^2\sin(\omega t+\theta) \\ &= -\omega^2(A\sin(\omega x+\theta)) \\ &= -\omega^2 x \end{aligned}$$

[問題 2] 直接積分形の微分方程式の解法 (1)

時刻 $t=0$ に位置 $x(0)=0$ にいた自動車が、時刻 t における速度 $dx/dt = t^3-4t^2+7t$ を満たしながら走行する。時刻 t における自動車の位置 $x(t)$ を求めよ。

[問題 2 解説] 直接積分形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = t^3-4t^2+7t$$

を解く問題に帰着する。ただし、初期条件 $x(0)=0$ に注意すること。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int (t^3-4t^2+7t)\,dt \\ &= \frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + C \quad (C\text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

ここで、$x(0)=0$ を用いると、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}\times 0^4 - \frac{4}{3}\times 0^3 + \frac{7}{2}\times 0^2 + C = 0 \\ \text{よって } C &= 0 \end{aligned}$$

以上より、時刻 t における自動車の位置 $x(t)$ は

$$\underline{x(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2}$$

[問題 3] 直接積分形の微分方程式の解法 (2)

以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$x' = e^t \sin t$$

[問題 3 解説]

$x = \int e^t\sin t\,dt + C$ であるが、ここで $I = \int e^t \sin t\,dt$ と置く (ここからは受験数学の復習)。

$$\begin{aligned} I &= e^t\sin t - \int e^t\cos t\,dt \quad (\text{部分積分}, f'=e^t, g=\sin t) \\ &= e^t\sin t - \left[e^t\cos t - \int e^t(-\sin t)\,dt\right] \\ &\qquad\qquad (\text{再び部分積分}, f'=e^t, g=\cos t) \\ &= e^t\sin t - e^t\cos t - \int e^t \sin t\,dx \\ &= e^t(\sin t-\cos t) - I \end{aligned}$$

ここで右辺の I を左辺に移項して、

$$\begin{aligned} 2I &= e^t(\sin t-\cos t) \\ I &= \frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t) \end{aligned}$$

よって解は $\underline{x(t) = \frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t) + C}$