微分方程式論 (1) 微分方程式とは何か (補足編)

担当: 金丸隆志

学籍番号: 氏名:

[補足 1] この授業で用いる変数

一般に、微分方程式に関する数学の教科書では「**変数 x の関数 y を求める**」形式で書かれていることが多い。例えば、微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4y \tag{1}$$

の解は

$$y = A\sin(2x+\theta)\ \ (A,\theta\text{は任意定数}) \tag{2}$$

である、という形で解説している。

しかし、この演習では工学とのつながりを重視して、「**変数 t の関数 x を求める**」形式で解説する。すなわち、微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \tag{3}$$

の解は

$$x = A\sin(2t+\theta)\ \ (A,\theta\text{は任意定数}) \tag{4}$$

である、という形である。ちなみに、ここで紹介したのは物理で取り扱う**単振動の運動方程式とその解**である。もちろん、工学では t を時刻の意味で用いることが多い。

そのため、微分方程式の勉強をする際は、**(x, y) の組で書かれた解説なのか、あるいは (t, x) の組で書かれた解説なのかを常に意識**し、混同することのないようにして欲しい。

[補足 2] 微分方程式の解の検算

中学生で方程式について学んだ際、得られた答えが正しいのかをチェックする検算方法について学んだはずである。微分方程式でも同様に解のチェック (検算) 方法を知っておくと便利である。微分方程式の解法を学び始める前に、検算の練習をしておこう。

例題として、上の補足で登場した

$$\text{(微分方程式)}\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -4x \tag{5}$$

$$\text{(解答)}\qquad x = A\sin(2t+\theta) \tag{6}$$

が正しいのか、チェック (検算) してみよう。

やることは「微分方程式 (5) の左辺と右辺に登場する関数を解答 (6) 式より計算し、(5) 式の (左辺)=(右辺) が成立するかどうかを調べる」ことである。

(5) 式 (右辺) の x は (6) 式そのままである。(5) 式 (左辺) の d^2x/dt^2 は (6) 式より計算しなければならない。微分して、

$$\frac{dx}{dt} = 2A\cos(2t+\theta) \tag{7}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4A\sin(2t+\theta) \tag{8}$$

が得られる。よって、

$$\begin{aligned}\text{(5) 式 (左辺)} &= \frac{d^2x}{dt^2}\\ &= -4A\sin(2t+\theta)\quad \text{((8) 式より)}\\ &= -4x\quad \text{((6) 式より)}\\ &= \text{(5) 式 (右辺)}\end{aligned} \tag{9}$$

となり、(5) 式の (左辺)=(右辺) が満たされることが確認された。つまり、解答 (6) 式は微分方程式 (5) を満たすことがわかった。

[補足 3] 直接積分形の微分方程式の解法

以下の形に書ける微分方程式を直接積分形という。

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \tag{10}$$

右辺が時刻 t のみで書けている点が特徴である。ちなみに、先程取り扱った微分方程式 (5) 式は右辺に変数 x が現れているので直接積分形ではないことに注意。

直接積分形の微分方程式の解法は簡単で、

$$x(t) = \int f(t)\,dt \tag{11}$$

のように右辺を t で積分するだけである。なお、積分は不定積分であるので、**任意の積分定数が解に含まれる**ことに注意。

[補足 4] 直接積分形の微分方程式の例題

時刻 $t=0$ に位置 $x(0)=0$ にいた自動車が、時刻 t における速度 $dx/dt = 1-e^{-3t}$ を満たしながら走行する。時刻 t における自動車の位置 $x(t)$ を求めよ。

[解法] [補足 3] で紹介した直接積分形の微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 1-e^{-3t}$$

を解く問題に帰着する。ただし、初期条件 $x(0) = 0$ に注意すること。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int (1 - e^{-3t})\, dt \\ &= t + \frac{1}{3}e^{-3t} + C \quad (C \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

ここで、$x(0) = 0$ を用いると、

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 + \frac{1}{3}e^{0} + C = 0 \\ \text{よって } C &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

以上より、時刻 t における自動車の位置 $x(t)$ は

$$\underline{x(t) = t + \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{3}}$$